$$B^{(ijkl)}=0, \qquad (11)$$

то есть рассматриваемый комплекс является комплексом W_0. Напротив, если выполнено (11), то для всех b_i выполнено (10), откуда, в свою очередь, в силу (7) следует (9), что означает инцидентность точки M и плоскости $\pi(V_1)$.

3. Рассмотрим обращенный тензор a^{ijk} [1]. С ним ассоциируется уравнение Монжа [5]:

$$a^{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k=0. \qquad (12)$$

Каждой интегральной кривой уравнения (12) соответствует однопараметрическое семейство V_1 кубик комплекса, вдоль которого характеристика $\ell(V_1)$ плоскости кубики принадлежит кривой K^3 [1]. Интегральную кривую уравнения (12) назовем асимптотической, если для соответствующего семейства V_1 второй полюс прямой $\ell(V_1)$ относительно кривой K^3 совпадает с точкой возврата луча торса, огибаемого плоскостями кубик рассматриваемого семейства.

Асимптотические линии уравнения (12) определяются системой

$$\begin{cases} a^{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k=0, \\ B^{ijkl}\omega_i\omega_j\omega_k\omega_l=0. \end{cases} \qquad (13)$$

Т е о р е м а 2. Для комплексов W_0 и только для них асимптотические линии уравнения (12) не определены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотические линии уравнения (12) будут не определены тогда и только тогда, когда уравнение системы (13) является следствием первого, т.е. когда выполняется соотношение

$$B^{(ijkl)}=a^{(ijk}\xi^{l)}. \qquad (14)$$

Свернув (14) с a_{ijk} и учитывая (1), получим $\xi^l=0$, и, следовательно, $B^{(ijkl)}=0$.

3. О п р е д е л е н и е 2. Комплекс кубик, характеризующийся условием

$$B^{ijkl}=0, \qquad (15)$$

называется комплексом W.

Т е о р е м а 3. Комплекс кубик будет комплексом W тогда и только тогда, когда для любого однопараметрического семейства V_1 комплекса точка $P(V_1)$ совпадает с оснащающей точкой M комплекса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено (15). Тогда из (7) вытекает $b_i\nu^i=\frac{b}{2}$. В силу соотношения (10) из [2] получаем $b_i\mu^i=b_i\nu^i$. Тогда из (6) следует

$$\nu^i=\mu^i, \qquad (16)$$

что равносильно совпадению точек M и $P(V_1)$. Напротив, пусть выполнено (16). Тогда $b_i\nu^i=b_i\mu^i=\frac{b}{2}$. Из (6) и (7) в этом случае получаем

$$B^{ijkl}b_ib_jb_kb_l=0, \quad B^{ijkl}b_jb_kb_l=0. \qquad (17)$$

Уравнения (17) должны выполняться для любых b_i. Тогда согласно [4] имеем $B^{(ijkl)}=0$, $B^{i(jkl)}=0$. Отсюда в силу симметрии тензора B^{ijkl} по первым индексам получаем $B^{ijkl}=0$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. К и м В.Б. О некоторых классах комплексов кубик в P_3. Кемерово, 1982. Деп. в ВИНИТИ 18.02.82. № 734.

2. К и м В.Б. Об одном классе однопараметрических семейств кубик в P_3//Теория функций и ее приложения. Кемерово, 1985.

3. М а л а х о в с к и й В.С. К геометрии касательно оснащенных подмногообразий//Изв. вузов. Матем. 1972. №9. С. 54-65.

4. Г у р е в и ч Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.; Л., 1948.

5. С и н ц о в Д.М. Геометрия монжевых уравнений//Работы по неголономной геометрии. Киев: Высшая школа, 1972. С. 102-116.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ СЕТЕЙ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ ЕВКЛИДОВА n-ПРОСТРАНСТВА

Г.В. К у з н е ц о в
(МГПИ им В.И. Ленина)

В данной работе изучаются свойства сети линий кривизны относительно поля $\vec{e}_n$ вдоль распределения Δ_{n-1}, причем вектор $\vec{e}_n$ перпендикулярен Δ_{n-1}.

В евклидовом пространстве E_n даны область Ω и распределение Δ_{n-1} в этой области. Пусть $\Delta_{n-1}(x)$ -значение распределения Δ_{n-1} в точке $x \in \Omega$. Вектор $\vec{e}_n$ в точке x направим так, что $\vec{e}_n \perp \Delta_{n-1}(x)$, а остальные векторы репера расположим в плоскости $\Delta_{n-1}(x)$. Пусть $\vec{F} = \vec{x} + \lambda \vec{e}_n$ такой вектор, что $d\vec{F} \parallel \vec{e}_n$ при некотором смещении точки x вдоль $\Delta_{n-1}(x)$. (Это направление смещения и называется направлением кривизны относительно поля $\vec{e}_n$ вдоль $\Delta_{n-1}(x)$). Огибающие этих направлений и интегральные кривые поля $\vec{e}_n$ образуют сеть линий кривизны относительно поля $\vec{e}_n$ в области Ω.

Отнесем область Ω к подвижному реперу $R^x = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_n)$ ($i, j, k, s = \overline{1, n-1}$), где векторы $\vec{e}_i \in \Delta_{n-1}(x)$, а вектор $\vec{e}_n$ - единичный и $\vec{e}_n \perp \Delta_{n-1}(x)$. Деривационные формулы такого репера имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^n \vec{e}_n, \quad d\vec{e}_n = \omega_n^i \vec{e}_i.$$

Направления ω^i кривизны находятся из системы уравнений

$$(\gamma^{ij}\Lambda_{jk} - \mu\delta^i_k)\omega^k = 0 \qquad (\omega_j^n = \Lambda_{jk}\omega^k + \Lambda_{jn}\omega^n), \qquad (1)$$

где $\mu = \frac{1}{\lambda}$ и μ -корень уравнения: $\det\|\gamma^{ij}\Lambda_{jk} - \mu\delta^i_k\| = 0$. Величины Λ_{ij} образуют геометрический объект типа тензора, а $\{\Lambda_{in}\}$ -геометрический объект типа ковектора. Направления кривизны будут различны, когда μ -матрица $\|\gamma^{ij}\Lambda_{jk} - \mu\delta^i_k\|$ имеет все элементарные делители первой степени.

Обозначим сеть линий кривизны относительно $\vec{e}_n$ через Σ_n. В общем случае эта сеть не ортогональна. Оказывается, чтобы данная сеть была ортогональной в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы распределение Δ_{n-1} было интегрируемо [1].

Каждому найденному направлению ω^i соответствует точка F_i на прямой $(x, \vec{e}_n)$. Такая точка называется фокусом прямой $(x, \vec{e}_n)$ относительно направления ω^i.

Здесь был рассмотрен случай, когда все μ_i -различны. Пусть теперь некоторые μ_i совпадают. Не нарушая общности, можно взять первые k значений μ равными ($\mu_1 = \ldots = \mu_k$), а остальные не равны между собой. Тогда и $F_1 = \ldots = F_k$. Построим следующую конструкцию. В точке $x \in \Omega$ возьмем два распределения: Δ_{n-k} и Δ_k. Распределению Δ_{n-k} принадлежат направления, которые соответствуют различным μ. Распределение Δ_k получим следующим образом. Из площадки $\Delta_{n-1}(x)$ мы выделим площадку $\Delta_{n-k}(x)$. Еще осталось $(k-1)$ направлений. Одно из них направим перпендикулярно $\Delta_{n-k}(x)$ и перпендикулярно $\vec{e}_n$. Так

проделаем для каждого оставшегося направления. Получим распределение Δ_k, ортогонально-дополнительное к Δ_{n-k}. При совпадении k фокусов присоединенная (фокусная) поверхность [2] распределения Δ_{n-k} в Δ_k распадается на $(n-k)$ -пересекающихся гиперплоскостей.

Пусть ℓ направлений кривизн, принадлежащих $\Delta_{n-1}(x)$, перпендикулярны. Сеть Σ_n будет частично ортогональной и распределение Δ_{n-1} не вполне интегрируемо. Ортогональные направления принадлежат распределению Δ_ℓ, а остальные - распределению $\Delta_{n-1-\ell}$. Если область Ω несет сеть линий кривизны, из которых ℓ ортогональны, то фокусная поверхность для Δ_ℓ, лежащая в плоскости $(x, \vec{e}_n, \Delta_{n-1-\ell}(x))$, распадается на ℓ гиперплоскостей. Уравнение фокусной поверхности для распределения Δ_ℓ запишется в виде:

$$\det\|\sum_{\bar{a}} \gamma_{ab} - y^{\bar{a}}\Lambda^{\bar{a}}_{ab}\| = 0, \qquad (2)$$

где $a, b = \overline{1,\ell}$; $\bar{a} = \overline{\ell+1, n}$; $\omega^{\bar{a}}_a = \Lambda^{\bar{a}}_{aA}\omega^A$ ($A = \overline{1,n}$). Верна следующая

Теорема 1. Точки пересечения прямой $(x, \vec{e}_n)$ с фокусной поверхностью (2) уходят в бесконечность тогда и только тогда, когда ℓ-ткань в области Ω состоит из ортогональных асимптотических семейств линий кривизны относительно нормали $(x, \vec{e}_n)$.

Уравнение фокусной поверхности для площадки $\Delta_{n-1-\ell}(x)$, а, как известно, данная фокусная поверхность будет лежать в плоскости $(x, \vec{e}_n, \Delta_\ell(x))$, запишется в виде:

$$\det\|\sum_u \gamma_{\bar{i}\bar{j}} - y^u\Lambda^u_{\bar{i}\bar{j}}\| = 0, \qquad (3)$$

где $\bar{i}, \bar{j} = \overline{\ell+1, n-1}$; $u = \overline{1,\ell}$; n. Отсюда следует

Теорема 2. Точки пересечения прямой $(x, \vec{e}_n)$ с фокусной поверхностью (3) уходят в бесконечность тогда и только тогда, когда линии кривизны, принадлежащие распределению $\Delta_{n-1-\ell}$ [3], характеризуются тем, что вдоль них переносится параллельно вектор $\vec{e}_{\bar{i}}$.

Для направления в точке $x \in \Omega$, определяемого параметрами $\bar{\omega}^a$, параметры ω^b сопряженного направления определяются из системы уравнений:

$$\Lambda^\alpha_{ab}\,\bar{\omega}^a\omega^b = 0, \qquad (4)$$

где $a, b = \overline{1,\ell}$; $\alpha = \overline{\ell+1, n}$, а величины Λ^α_{ab} образуют геометричес-

кий объект типа тензора, симметричного по нижним индексам. Систе-
ма (4) есть система $n-\ell$ линейных однородных уравнений с ℓ
неизвестными ω^b. Если $n-\ell=\ell$, т.е. $n=2\ell$, то матрица
$\| \Lambda^{\alpha}_{ab}\, \overline{\omega}^a \|$ коэффициентов системы (4)-квадратная. Для направления
$\{\omega^b\}$ существует сопряженное тогда и только тогда, когда направ-
ление $\{\overline{\omega}^a\}$ удовлетворяет условию

$$\det \| \Lambda^{\alpha}_{ab}\, \overline{\omega}^a \| = 0. \tag{5}$$

Таким образом, при $n=2\ell$ в $\Delta_\ell(x)$ выделяется конус (5) порядка
ℓ - место одно-направлений $\overline{\omega}^a$, для которых существуют сопря-
женные направления ω^b, очевидно, также принадлежащие этому
конусу.

Вполне интегрируемое распределение Δ_ℓ определяет интеграль-
ное многообразие V_ℓ. Когда сеть линий кривизны на V_ℓ будет
совпадать с сетью линий кривизны относительно нормали $(x,\vec{e}_n)$?
Для этого необходимо и достаточно выполнение условий

$$\Lambda_{aa} = b^n_{aa}, \tag{6}$$

где b^n_{aa} - компоненты второго основного тензора поверхности V_ℓ.

Т е о р е м а 3. Сеть Σ_n является геодезической тогда и
только тогда, когда $\Lambda_{ijj} = -\Lambda_{in} \cdot \Lambda_{jj}$ и $\sum_i \Lambda_{ii} = 0$, где

$$d\Lambda_{ij} - \Lambda_{kj}\,\omega^k_i - \Lambda_{ik}\,\omega^k_j - \Lambda_{in}\,\omega^n_j = \Lambda_{ijA}\,\omega^A \quad (A = 1, n).$$

Т е о р е м а 4. Сеть линий кривизны относительно поля $\vec{e}_n$
вдоль $\Delta_{n-1}(x)$ в области Ω является n-ортогонально-сопря-
женной системой в смысле И.Н.Григорьева [4] тогда и только
тогда, когда выполнены следующие условия:

$$(\Lambda_{AC} + \Lambda_{CA})(a^A_{CC} - a^C_{AA}) + (\Lambda_{BC} + \Lambda_{CB})\,a^C_{BC} - (\Lambda_{AB} + \Lambda_{BA})\,a^A_{BA} = 0, \tag{7}$$

$$(\Lambda_{AB} + \Lambda_{BA})\,a^A_{BB} + (\Lambda_{BC} + \Lambda_{CB})(a^B_{CB} + a^C_{BC}) + (\Lambda_{AC} + \Lambda_{CA})\,a^A_{CC} = 0, \tag{8}$$

где $A \neq B \neq C$, а $\omega^B_A = a^B_{AC}\,\omega^C$ $(A, B, C = \overline{1,n})$.

Ковектор Λ_{in} определяет в распределении Δ_{n-1} подраспреде-
ление Δ_{n-2}. Распределение Δ_{n-2} вполне интегрируемо тогда и
только тогда, когда $\Lambda_{i n \hat{j}} = \Lambda_{j n \hat{i}}$, где $\hat{i}, \hat{j} = \overline{1, n-2}$. В этом случае
через каждую точку $x \in \Omega$ проходит интегральное многообразие
V_{n-2} этого распределения. В общем случае это интегральное мно-

гообразие несет сопряженную сеть. Для того чтобы сопряженная
сеть на V_{n-2} входила в состав сети линий кривизны Σ_n относи-
тельно нормали $(x, \vec{e}_n)$, необходимо и достаточно выполнение
равенств $\Lambda_{\hat{i}\hat{i}} = b^n_{\hat{i}\hat{i}}$, где $\omega^n_{\hat{i}} = \Lambda_{\hat{i}\hat{j}}\,\omega^{\hat{j}}$, $\Lambda_{\hat{i}\hat{i}}$ - компоненты тензора
$\Lambda_{\hat{i}\hat{j}}$, а $b^n_{\hat{i}\hat{i}}$ -компоненты второго основного тензора поверхнос-
ти V_{n-2}.

Пусть дано распределение Δ_{n-2}, заданное в распределении
Δ_{n-1} полем ковектора Λ_{in}. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-2} \in \Delta_{n-2}(x)$ и дано
распределение Δ_2, такое, что $\vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n \in \Delta_2(x)$. Оказывается, что
если распределение Δ_2 минимально, то фокусная поверхность в
плоскости $\Delta_{n-2}(x)$ является квадрикой вида:

$$\Lambda^n_{\hat{i}\, n-1} \cdot \Lambda^{n-1}_{\hat{i} n} (z^{\hat{i}})^2 = 1. \tag{9}$$

В этом случае верны следующие теоремы:

Т е о р е м а 5. Для голономного распределения Δ_2 фокус-
ная поверхность в плоскости $\Delta_{n-2}(x)$ является эллипсоидом с
центром в точке x.

Т е о р е м а 6. Для плоско/го неголономного распределе-
ния Δ_2 фокусная поверхность в плоскости $\Delta_{n-2}(x)$ является мни-
мым эллипсоидом.

Обозначим вторую поляру точки x относительно фокусной
поверхности (9) через Q [2]. Далее показано, что ранг Q по-
нижается на t, когда выполнено условие

$$\nabla_{\vec{e}_{\hat{\alpha}}} \vec{e}_{\hat{i}} \in \Delta_{n-2} \qquad (\hat{\alpha} = n-1, n) \tag{10}$$

для t значений индекса $\hat{i}$. Если $t = n-2$, то ранг $Q = 0$, и в
этом случае фокусная поверхность голономного распределения Δ_2
является дважды взятой несобственной гиперплоскостью в Δ_{n-2}.

Т е о р е м а 7. Если $0 < \text{ранг}\, Q < n-2$ и распределение
Δ_2 голономно, то в этом случае фокусная поверхность является
эллиптическим цилиндром с $(t+1)$-мерными образующими.

Ранг $Q = n-2-t$ тогда и только тогда, когда

$$\text{пр}_{\vec{e}_{\hat{i}}} \vec{a}_{n-1,n} \cdot \text{пр}_{\vec{e}_{\hat{i}}} \vec{a}_{n,n-1} = 0$$

для t значений индекса $\hat{i}$.

Т е о р е м а 8. Если $0 < \text{ранг}\, Q < n-2$, то фокусная
поверхность является параболическим цилиндром с t-мерными
образующими.

Если же Δ_2 минимальное, то фокусная поверхность не может быть конусом. Для не-минимального распределения Δ_2 будет верна

Т е о р е м а 9. Если распределение Δ_2 не-минимально, ранг $Q = n-2$ и верно $(\Lambda^{n-1}_{\tau\, n-1})^2 = -4\Lambda^{n-1}_{\tau n}\cdot\Lambda^{n}_{\tau\, n-1}$, то фокусная поверхность является конусом в Δ_{n-2} с точечной вершиной.

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. Материалы по геометрии /МГПИ им.В.И. Ленина.М.,I978.Вып.I.

2.М а т и е в а Г.К. К геометрии минимальных распределений// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./ Калинингр. ун-т.Калининград,I984.Вып.I5.С.60-63.

3.К у з ь м и н М.К. Сети,определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n, и их обобщения// Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М.,I975.Т.7.С.2I5-230.

4.Г р и г о р ь е в И.Н. Асимптотические преобразования P-ортогонально-сопряженных систем в n-мерном пространстве// Докл.АН СССР.I954.Т.97.№5.С.765-767.

УДК 5I4.75

О СЕМЕЙСТВАХ КОЛЛИНЕАЦИЙ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н.В.М а л а х о в с к и й
(Калининградский ун-т)

Исследуются n-параметрические семейства Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств, отображающих заданную точку $P^\circ \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $p^\circ \in p_n$: $\pi(P^\circ) = p^\circ$, причем точки P° и p° описывают n-мерные области. Построена последовательность фундаментальных объектов семейства Π_n, найдены и геометрически охарактеризованы некоторые тензоры, охватываемые ими. Определено фокальное многообразие коллинеации $\pi \in \Pi_n$ и порождаемые им фокальные гиперповерхности в пространствах $\mathcal{P}_n$ и p_n.

§I. Поля фундаментальных объектов семейства коллинеаций

Отнесем пространства $\mathcal{P}_n$ и p_n к подвижным реперам $R=\{A_{J'}\}$ и $r=\{a_{i'}\}$ $(J', I', K', i', j', k' = \overline{0,n})$, где $A_0 = P^\circ$, $a_0 = p^\circ$. Деривационные формулы реперов и уравнения структуры пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n запишутся в виде:

$$dA_{J'} = \Omega^{K'}_{J'} A_{K'}, \quad da_{i'} = \omega^{k'}_{i'} a_{k'}; \tag{I.1}$$

$$D\Omega^{K'}_{J'} = \Omega^{I'}_{J'} \wedge \Omega^{K'}_{I'}, \quad d\omega^{k'}_{i'} = \omega^{j'}_{i'} \wedge \omega^{k'}_{j'}, \tag{I.2}$$

причем $\Omega^{J'}_{J'} = 0$, $\omega^{i'}_{i'} = 0$. Обозначим через $\tilde{X}^{J'}$, $\tilde{x}^{i'}$ однородные, а через $X^J = \frac{\tilde{X}^J}{\tilde{X}^0}$, $x^i = \frac{\tilde{x}^i}{\tilde{x}^0}$ -неоднородные координаты точек M и m в пространствах $\mathcal{P}_n$, p_n $(J, I, K, i, j, k = \overline{1,n})$. Тогда уравнения стационарности точек M и m запишутся в виде (см.[I], с.356)

$$\begin{cases} \nabla X^J - X^J X^K \Omega^0_K + \Omega^J = 0, \\ \nabla x^i - x^i x^k \omega^0_k + \omega^i = 0, \end{cases} \tag{I.3}$$

где $\Omega^J \overset{def}{=} \Omega^J_0$, $\omega^i = \omega^i_0$, а символ ∇ означает абсолютное дифференцирование с учетом прибавления членов с диагональными формами Ω^0_0, ω^0_0, взятыми со знаком " - " для верхних индексов и со знаком "+" для нижних с кратностью, равной числу индексов.

Учитывая, что $a_0 = \pi(A_0)$, коллинеация $\pi \in \Pi_n$ определится формулой

$$x^i = \frac{M^i_J X^J}{1 - P_J X^J}. \tag{I.4}$$

Дифференцируя (I.4) с использованием (I.3), убеждаемся, что формы Пфаффа

$$\Omega^J, \ \omega^i, \ \nabla M^i_J, \ \nabla P_J + \Omega^0_J - M^k_J \omega^0_k \tag{I.5}$$

являются структурными формами коллинеации $\pi \in \Pi_n$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только невырожденные коллинеации. Так как точки P° и p° описывают n-мерные области, то формы Пфаффа Ω^J можно принять за базисные и записать систему дифференциальных уравнений семейства коллинеаций Π_n в виде.

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda^i_J \Omega^J, \quad \nabla M^i_J = M^i_{JK} \Omega^K, \\ \nabla P_J + \Omega^0_J - M^k_J \omega^0_k = P_{JK} \Omega^K, \end{cases} \tag{I.6}$$

причем

$$\det(\lambda^i_J) \neq 0, \quad \det(M^i_J) \neq 0. \tag{I.7}$$

Продолжая систему (I.6) два раза, находим: